

「少年学者」

用“山顶数对称提取法”解特殊高次方程

刘思远*, 王文婧

中国人民大学附属小学 北京

摘要: 通过观察方程各项的系数特征与结构, 我探索出“山顶数对称提取法”。并用它解开了一类特殊的一元五次方程。还发现这一方法在更次高程中也适用。

关键词: 系数结构; 山顶数; 对称提取法; 高次方程

1 引言

在做数学练习时, 我遇到了一个“拦路虎”——具有挑战性的高次方程问题。

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 = 0$$

这个方程次数好高, 有五次! 直接展开计算不仅步骤繁琐, 还极易出现计算错误。对此, 我未急于直接演算, 而是先观察方程各项的系数特征。看着看着, 我竟然发现了一个“秘密”, 还用它把方程轻松解开了!

2 观察系数结构, 定义“山顶数”

提取上述方程各项的系数, 依次为: 1, 2, 3, 2, 1。对该系数序列进行分析: 从左往右, 系数依次递增, 由 1 到 2 再到 3; 从右至左, 系数同样依次递增, 由 1 到 2 再到 3。该序列以中间数字 3 为峰值, 两侧数字呈对称式递减, 形似对称的山峰, 因此我将这类系数序列命名为“山顶数”, 即中间数值最大, 两侧数值对称下降的数序列。

3 探究解题方法, 推导“山顶对称提取法”

针对该五次方程, 我通过分步拆解、逐步化简的方式, 推导得出“山顶对称提取法”, 具体解题步骤如下:

3.1 第 1 步: 提取公因式 x

观察原方程可知, 每一项均含有公因式 x, 将其提取可得:

$$x(1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4) = 0$$

这样, 我们可以立刻得到第一个解: $x_1 = 0$ 。

3.2 第 2 步: 对括号内多项式进行对称项配对

提取公因式后, 括号内多项式的系数序列仍为 1, 2, 3, 2, 1, 符合“山顶数”的特征。对此, 我将序列中对称位置的项进行配对组合, 可得:

$(1 + x^4) + (2x + 2x^3) + 3x^2 = 0$, 再对各配对项提取公因式, 化简为:

通讯作者: 刘思远; **单位:** 中国人民大学附属小学 北京

收稿日期: 2026-01-23 **录用日期:** 2026-04-10

DOI: <https://doi.org/10.58244/jie.263856>

$$(1+x^4) + 2x(1+x^2) + 3x^2 = 0$$

3.3 第3步：凑完全平方公式完成进一步化简

根据完全平方公式，可得：

$1+x^4 = (x^2+1)^2 - 2x^2$ 。将其代入上式可得：

$(x^2+1)^2 - 2x^2 + 2x(1+x^2) + 3x^2 = 0$ ，对式子中的同类项进行合并化简，最终得到：

$$(x^2+1)^2 + 2x(1+x^2) + x^2 = 0$$

你看到了什么？令 $A=x^2+1$ ， $B=x$ ，则上式不就是 $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$ 吗？就是完全平方的公式呀！

因此可进一步化简为： $[(x^2+1)+x]^2 = 0$

3.4 第4步：整合化简结果，完成方程变形

将上述步骤的结果整合，原五次方程可最终变形为：

$$x(x^2+1+x)^2 = 0$$

4 结合公式求解，得出方程全部解

基于上述化简后的方程，结合一元二次方程求根公式，分情况求解可得方程的所有解：

4.1 实数解：

由于0乘任何数都等于0，可直接得到方程的一个实数解为 $x=0$ 。

4.2 复数解：

若 $(x^2+x+1)^2 = 0$ ，根据一元二次方程求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($a \neq 0$) 可计算出来：

$$\text{则 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

该部分内容超出了小学数学课程标准的学习范围，但在这次研究中，未知的数学知识让我对数学的探究兴趣变得更浓厚了。因此，我主动和老师探讨并自主查阅了相关资料去学习、尝试求解。

5 问题与思考

解出上述五次“山顶数”方程后，我开始思考并展开进一步探究，提出以下两个问题。

5.1 问题一：“山顶对称提取法”是否适用于更高次的“山顶数”方程？

针对6次方、7次方直至11次方的“山顶数”方程，我以11次“山顶数”方程为研究对象，结合等比数列求和知识完成化简与求解。研究发现：奇数次的“山顶数”方程，可先提取公因式 x ，再通过完全平方公式降次，后续结合相关公式即可求解；偶数次的“山顶数”方程，第一步无法提取公因式 x ，但后续的对称配对、公式化简等步骤，与奇数次方程的解题思路一致。

5.2 问题二：“山顶数”是否仅限定为1, 2, 3, 2, 1这类间隔为1的数序列？

针对1, 4, 7, 4, 1或2, 5, 8, 5, 2等非连续自然数的对称数序列，我通过代入演算发现：只有当系数为连续自然数，且首项、末项均为1的对称数序列时，才可运用“山顶对称提取法”求解；若系数序列不符合该特征，则无法通过凑完全平方公式完成化简，该类型的方程，需要我进一步进行学习探究。

6 我的数学感悟

本次对“山顶数”方程的探究，让我深刻体会到，解决复杂数学问题时，不应盲目硬算，而应先观察问题的结构特征，挖掘其中的规律，通过化繁为简的思路寻找简便解法——数学的“简约美”，往往能为解题提供巧妙的思路。同时我也认识到，在解决一道数学问题后，还应进一步探究解题方法

的适用范围，尝试将方法推广至同类问题中，做到举一反三。本次探究中，我定义了“山顶数”，并推导得出“山顶对称提取法”，后续遇到系数为“山顶数”的高次方程，均可运用该方法求解。

数学的奥秘无穷无尽，只要保持观察的习惯、敢于大胆探索与想象，就能在数学学习中发现更多解题技巧，解锁更多数学奥秘！

作者简介：

刘思远 我叫刘思远，今年 10 岁，最大的爱好是研究各类方程，喜欢从数学题里找规律、想巧法。始终相信“观察 + 探索 = 数学发现”，理想是成为一名数学家，解锁更多数学的奥秘。

Employing the "Symmetry Extraction Method of Mountain-Peak Number " to Solve Special Higher-Order Equations

Liu Siyuan, Wang Wenjing

Abstract: By observing and analyzing the coefficient structure, I applied the "symmetry extraction method of mountain-peak numbers" to solve a particular type of univariate quintic equation. Additionally, I found that this method is also applicable to equations of even higher degrees.

Keywords: Coefficient structure, Symmetry extraction method, Mountain-peak number, Higher-order equations
