「百科哲思」

以“余权重向量”为例品鉴数学研究中的思维艺术

陈前[1]，施怿晗[2]

1 上海市杨浦区教育局
上海 200093
2 上海市控江中学
上海 200093

摘要：当一个问题的解决方法比较独特时，那么，从中提炼出一种普适性工具就是非常有意义的研究。本文就是一位中学数学教师与学生一起完成的这样的研究——从对《华罗庚文集》中一个被 11 整除的问题的讨论中提炼出“余权重”、“余权重向量”、“数位数行列式”等概念，并由此得到检测整除性的一个新工具，并以“思维复盘”的内省视角，品鉴数学研究活动的思维艺术，逐一加以描述，对于数学研究和数学教育都具有较好的意义。

关键词：余权重向量；数学研究；思维艺术

中图分类号：G426

一、引言

人类生产艺术，也享受艺术。艺术产品的生产是人类的精神劳动实践过程，其作品是人类获得幸福的重要源泉。思维是人之为人的主要特征，思维活动也是人类进步的主要路径。马克思强调，人是思维的主体，具有能动性和创造性。人们不仅能够认识世界，还能够根据自己的需要和目的去改造世界。这种主体性体现在人们对知识的追求、对真理的探索以及对未来的憧憬等方面。而思维的艺术，更是一种极端重要的高阶精神活动。

数学思维活动蕴含着极其丰富的思维艺术。数学问题的解决过程中，运用各种富有创造性的方法，将数学材料转化为充满逻辑、灵性和情感的数学成果，也是一种艺术作品。马克思一生酷爱数学，他认为数学是科学的皇后，是所有科学的基础。在马克思看来，数学不仅是一种抽象的思维工具，更是揭示自然界规律的重要手段。从 19 世纪 40 年代起，直到逝世前不久，数十年如一日地利用闲暇时间学习和钻研数学，给我们留下了近千页数学手稿，其中有读书摘要、心得笔记和述评，以及一些研究论文的草稿。由此可见数学的魅力与价值，数学教学活动当带领学生来真切体验。

2021 年 9 月，我在一所中学开设了文学创作、数学思创两门辅导课程。一次辅导结束之后，一位预备年级的女同学留下来，拿出一本华罗庚文集，打开她折好的一个页码，问一个数学题：“一个正整数，若奇数位上的数字之和等于偶数数位上的数字之和，则这个数必然被 11 整除”。大家知道，这类问题并不是学校数学课程里关心的，应该归于奥数一类。但是，用初等数学的知识是可以解决这个问题的。于是，我和她一起讨论、琢磨，得到了证明方法。后来，我们从这个论证方法得到启发，由此起航，进行了长达两个月的深入探讨，得到一系列的创新成果，编成了论文小册子《两颗星不孤单》。这之中，蕴含着非常美妙的数学思维艺术，我将其做了一些整理。

通讯作者：陈前 **邮箱：**2210977708@qq.com
收稿日期：2026-01-15 **录用日期：**2026-02-15
DOI: https://doi.org/10.58244/sha.263751

二、简化的艺术：从简单的问题解决中探索对复杂问题的解法

复杂问题：一个正整数，若奇数位上的数字之和等于偶数数位上的数字之和，则这个数必然被 11 整除。复杂之处在于这个正整数的位数可以很大很大，甚至无限大。我们如何来对一个无限位数的整数的某个性质进行研究呢?

问题简化：举例，从简单的个例中寻找思路。我们可以举例 8965，其中，偶数位的数字之和为 8+6，奇数位的数字之和为 9+5，两者相等。先用笔算（计算器也可以）验证：8965 除以 11 等于 815，被 11 整除。接下来，要回避计算的方法，而采用推理的方法来论证。思路如下：

第一步 既然与奇数位和偶数位有关，那就需要把这个 4 位数的表示方法拆分成与数位相关的形式（* 为乘积运算）：

8965=8*1000+9*100+6*10+5=（8*1000+6*10）+（9*100+5）

第二步 既然是讨论是否被 11 整除的问题，就需要把 10 与 11 建立联系，于是有：

8965=8*（11-1）*（11-1）*（11-1）+6*（11-1）+9*（11-1）*（11-1）+5

以上这个式子, 除以11的余数等同于 8*(-1)+6*(-1)+9*1+5*1的余数，合并为(8+6)*(-1)+(9+5)*1.

这个时候，我们恍然大悟。可以把其中的奥妙归纳出来：奇数位上的数值之和除以 11 的余数与 1 关联，而偶数位数的数值之和除以 11 的余数与 -1 关联。

上面这个道理，可以推广到无限数位。于是，解法的大致路径清晰了。其实，以上的探究过程采用的是"案例研究法"，这种思维艺术被广泛的应用。例如，费孝通的《江村经济》就是从解剖一个村庄来窥探中国农村基本状况的典型成果。

三、记号的艺术：创造一种记号来优化对问题解决方法的描述

记号的创造对于人类具有重大意义。记号本身就是承载创造思维的艺术作品。原始部落的图腾记号就是文化叙事的符号，也具有神秘的艺术磁力。数学学习中，学生对数学记号（符号）的学习应当吸取其中的思想营养，而不仅仅是把它们视为干瘪的记号。

我趁这个机会给这位同学介绍了几种记号：体现出各个数位的整数表述方法（$\overline{a_i\cdots a_2a_1a_0}$，下标标记了数位）、幂的计数方法（$10^i$），求和的记号（$\sum_{i=0}^{i}a_i10^i$）。和余数同构记号"≡"（例如，对于除以 7 的余数而言，1 ≡ 8 ≡ 15 ≡ 22…）：然后写出推理过程：

$$\overline{a_n\cdots a_2a_1a_0}=\sum_{i=0}^{n}a_i10^i=\sum_{i=0}^{n}a_i(11-1)^i$$
$$\equiv a_0+a_1\cdot(-1)+a_2\cdot 1+a_3\cdot(-1)+a_4\cdot 1+a_5\cdot(-1)\ldots\ldots$$
$$\equiv(a_0+a_2+a_4+\ldots)-(a_1+a_3+a_5+\ldots)$$

因此，只要这个两部分的和相等，除以 11 的余数就是 0。

四、类比的艺术：从一类问题的解法中类比出另一类问题的解法

关于 11 整除的这个问题的解法可以化归为对各个数位对于 11 的整除关联，那么我们能用这种思路来诠释关于 3、5、7 等等整除的整除问题吗?一个数学思维活跃的人自然会去研究。例如，我们都知道，一个正整数，各个数位上的数字之和能被 3 整除，这个数就是 3 的倍数。我们用上面的方法来推理：

$$\overline{a_n\cdots a_2a_1a_0}=\sum_{i=0}^{n}a_i10^i=\sum_{i=0}^{n}a_i(9+1)^i$$
$$\equiv a_0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 1+a_3\cdot 1+a_4\cdot 1+a_5\cdot 1+\ldots$$
$$\equiv\sum_{i=0}^{n}a_i$$

因此，只要各个数位上的数的和是 3 的倍数，这个数就被 3 整除。

再例如，关于著名的梅森素数猜想——以形如 2^p-1（p 为素数）表示的素数也是素数，由 17 世纪法国数学家马林 · 梅森系统研究并得名，截至 2024 年 10 月，全球已发现 52 个梅森素数，最大者为 M136279841，超过 4100 万位，我们可以类比前面的余数化归方法来验证 $2^{97}-1$ 不能被 13 整除。方法如下：

2^3 除以 13 的余数为 8，也可以记为 -5，因此 2^3*2^3 对于 13 的余数同构于 25 的余数，余数为 1，从而得知 2^6 对于 13 的余数为 1，然后可知 2^{96} 对于 13 的余数为 1（因为 96 是 6 的倍数)，所以 2^{97} 对于 13 的余数为 2，$2^{97}-1$ 对于 13 的余数为 1。虽然 $2^{97}-1$ 是一个很大的数，但是我们以上的证明过程却是很简单的，没有复杂的计算。

如果，数学家通过计算机协同分工，用这种方法检验了 $2^{97}-1$ 不能被小于它的所有素数整除，就能得出它是素数的结论。

五、概念的艺术：从特殊方法中抽象出概念用于对普遍对象的研究

概念（concept）是反映事物特有属性或本质属性的思维形式。是人们在理性认识阶段的产物，是理性思维的一种基本形式。人们在社会实践中，起初只是接触事物的现象，事物的各个片面以及这些事物的外部联系，形成感性认识。在此基础上，经过思维加工制作，即运用比较、分析、综合、抽象、概括等方法，逐步揭示出对象的特有属性，特别是本质属性，产生认识过程中的飞跃，上升到理性认识，从而形成概念。在进行学术研究或项目时，对关键概念的清晰界定能够确保所有参与者对研究对象有共同的理解。这有助于避免由于理解差异而导致的误解和混淆，从而确保研究的准确性和有效性。

我们从前面关于 11 和 3 的整除性问题讨论中，可以感觉到其中的方法具有普遍意义，其中的关键是各个数位对于整除的关联性，这个关联系体现在对余数的影响程度，于是，我们可以创造一组概念来系统地描述其中的对象并用这些概念深化这一类问题的研究。这种思维的艺术对于所学的学科都是如此。

第一组概念：数位数和数位数值

对于正整数，$\overline{a_n \cdots a_2 a_1 a_0}$：我们把 a_i 称为对应数位上的数，简称数位数，例如，a_1 称为 10 位上的数，a_4 称为 10000 位上的数。我们把 a_1*10 称为 10 位上的数值，把 a_4*10000 称为 10000 位上的数值。而我们前面用的研究方法就是把“各个数位值的和”关于某个整数的余数问题转化为“各个数位数关于这个整数的余数的和”的问题。

第二组概念：余权重和余权重向量

回顾前面关于 11 的整除问题的研究，我们发现：奇数位上的数值对于 11 的余数，转化为奇数位上的数与 1 的乘积对于 11 的余数。偶数位上的数值对于 11 的余数，转化为偶数位上的数与 -1 的乘积对于 11 的余数。因此，我们把这里的“1”视为奇数位数值对于 11 的余数权重，把这里的“-1”视为偶数位数值对于 11 的余数权重。例如，对于 3 而言，各个数位上的数值的余权重都是 1。

对于 7 而言，余权重就比较复杂。个位数的余权重是 1，十位的余权重是 3，百位的余权重是 2，千位的余权重是 -1，万位的余权重是 -3，十万位的余权重是 -2，之后，开始重复，呈现周期性。比如，我们随意写出一个数字 896345919，要研究它是否可被 7 整除，同构于以下式子对于 7 的余数问题：9*1+1*3+9*2+5*(-1)+4*(-3)+3*(-2)+6*1+9*3+8*2 对于 7 的余数。因为 9 对于 7 的余数同构于 2，5 对于 7 的余数同构于 (-2)，这个式子又可以同构为：

2*1+1*3+2*2+(-2)*(-1)+(-3)*(-3)+3*(-2)+(-1)*1+2*3+1*2，同构于 0，所以整除。没想到，我运气很好，随手写一个数字就能被 7 整除。如果不能被整除，我们可以根据余数将原来的数修改一下得到一个可被整除的数。假设我们写出的是 896345917，余数就是 5。那么加 2 或者 -5 就可以得到一个被 7 整除的数。

从这个例子中，我们可以理解这种算法的奇妙之处，把繁杂的计算简化为数位上的数与余权重的积之和的余数问题。对于非常的素数寻找工作，用其中的原理设计一种检测方法，会节省计算机的算力，提高运算效率。这也许是这个方法的应用情景。

六、进化的艺术：从简单概念中深化出系统性概念研究复杂问题

在研究关于 3、7、11 的余权重之后，我们可以创造系统性的概念来描述其中的对象和对对象的运算。

例如，关于 7 的各数位上的余权重分别为 1, 3, 2, -1, -3, -2 以及周期性地呈现，我们创造第三组概念。

第三组概念：余权重向量和余权重周期

关于 7 的余权重向量记为（1, 3, 2, -1, -3, -2），其中的元素是有顺序的，与各个数位对应，余权重的周期为 6。

关于 3 的余权重向量记为（1, -1），余权重周期为 2。

关于 5 的余权重向量记为（1, 0），

不需要周期，只要个数是 5 的倍数，这个数就是 5 的倍数。

关于 13 的余权重向量记为（1, -3, -4, -1, 3, 4），周期为 6。

借用向量的概念，我们可以把其中的余数运算过程与向量积联系起来。以 896345919 为例，6 个数位为一组，我们得到一个数位数行列式（这也是一个很重要的概念）：

$$\begin{pmatrix} 9\,1\,9\,5\,4\,3 \\ 6\,9\,8\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$$

其中, 数位不足的部分记为 0, 这样, 我们可以把前面的计算过程记为：

$$\begin{pmatrix} 9\,1\,9\,5\,4\,3 \\ 6\,9\,8\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$$

与余权重向量（1, -3, -4, -1, 3, 4）的乘积。写为：

$\begin{pmatrix} 9\,1\,9\,5\,4\,3 \\ 6\,9\,8\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$*（1, -3, -4, -1, 3, 4）

=9*1+1*3+9*2+5*(-1)+4*(-3)+3*(-2)+6*1+9*3+8*2 ≡ 0

对于以上的表述方法，我们还可以进一步改进：

把第 i 组数位数向量记为 $\acute{a}_i$，$\acute{a}_1$ =（9 1 9 5 4 3），$\acute{a}_2$ =（6 9 8 0 0 0），把余权重向量记为 $\tilde{a}$，于是余数的运算同构于 $\sum_{i=0}^{n}\acute{a}_i * \tilde{a}$ 的余数。

当然，引入这些概念和运算定义之后，数位行列式蕴含着独特的规律，可以开辟一个全新的研究领域。本文在这里不展开了，留待后续研究。

七、有趣的艺术：把严肃的数学运算过程用有趣的语言来描述

再回到 2021 年 9 月我和学生开启的那场研究，到了 22 年，疫情开始，市民天天做核酸检测，每家每户都有自助式核酸检测卡。我的学生把关于 7 的整除性检测用“整除检测卡”来表述。以 88965789543 能否被 7 整除为例：

见表 1。

所以 88965789543 不能被 7 整除，余数为 1。

再例如，检测 978765413 是否被 13 整除：

见表 2。

“整除检测卡”这个生活化的语言形象生动，对于数位不是很多的情况，也很便捷。同时，承载了时代的记忆（疫情时代的语言）。

八、进阶的艺术：把低价的问题解决办法拓展到高阶层次去研究

进阶是人类思考问题的战略跃迁，适用于各个领域。例如，在政治学领域，管理的思维进阶为治理的思维。

表 1.　88965789543 能否被 7 整除

数位数	3 个位	4 十位	5 百位	9…	8	7	5	6	9	8	8
余权重	1	3	2	-1	-3	-2	1	3	2	-1	-3
位值余数	3	12	10	-9	-24	-14	5	18	18	-8	-24
余数同构化归	3	-2	3	-2	-3	0	-2	4	4	-1	-3
最后一列是各位上数值对于 7 的余数，合计为 -6，余同构于 1											

表 2.　检测 978765413 是否被 13 整除

位值数	9	7	8	7	6	5	4	1	3
余权重	1	-3	-4	-1	3	4	1	-3	-4
位值数余数	9	-21	-32	-7	18	20	4	-3	-12
	合计：-24 ≡ 2。结论：余数为 2。								
位值数	9	7	8	7	6	5	4	1	3
余权重	1	-3	-4	-1	3	4	1	-3	-4
位值数余数	9	-21	-32	-7	18	20	4	-3	-12
	合计：-24 ≡ 2。结论：余数为 2。								

武力战争的思维进阶为文明化融的思维。我们得出 3,5,7,11,13 等等比较小的素数的余权重向量之后，思维的逻辑艺术会引导我们提出更高阶的研究课题，例如：

——可以为每个素数都制作余权重向量，绘就已知素数的余权重向量表，作为数论中的一个“资产”，这是一项很有价值的数学工程。

——可以用余权重向量与数位数行列式的积来检测任意整数对于已知所有素数的整除性，为人类寻找素数提供了一种路径。

——如果对于数位数行列式与余权重向量积的运算特征进行深入的研究，一定会得到更加惊人的规律，这些规律或许对于素数的探究构造出一个新的工具。

我们先考虑第一个问题，对于一个比较大的素数的余权重向量，如何构建。以 17 为例。

对于个数、10 位、100 位、1000 位...，构成的余权重向量为：

（1, -7, -2, -3，4, 6, -8, 5, -1, 7, 2, 3, -4, -6, 8, -5）

对于这个向量，周期为 16，前面 8 个数与后面 8 个数对应为相反数，如果把 -7 同构于 10、-2 同构于 15，其他负的权重系数也转为整数，这个权重向量是（1, 10, 15, 14, 4, 6 ,9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12），从 1 到 16 全包含进去了。

但是，对于比较大整数的，我们在计算余权重时，不一定要以 10、100、1000...为组别进行测算。我们可以以100, 100的2次幂、100的3次幂...为组别进行检测。

例如，对于 17。我们以 100 为组别来计算余权重，可以得到如下余权重向量：（1, -2, 4, - 8, -1, 2, -4, 8），比以 10 为组织的余权重向量明显简单了。我们把以 10 为组别的称为 1 阶，以 100 为组别的称为 2 阶。现在用 17 的 2 阶余权重向量检测一个数的整除性。

检测一个随意写出的整数：865865239

2 阶数位行列式为（39, 52, 86, 65, 8），同构于（5, 1, 1, -3, 8）（备注：例如。39 对于 17 而言，余数同构于 5，其他类推）与余权重向量（1, -2, 4, -8, -1）（其余的权重用不着）的乘积的余数，=5-2+4+24-8=23，对于 17 的余数为 6。我们用计算器检测一下 865865239-6=865865233 可被 17 整除。

我们可以同时计算 2 阶、3 阶的余权重向量，例如：

——23 的 2 阶余权重向量为（1, 8, -5, 6, 2, -7, -10, -11, 4, 9, 3）

——23 的 3 阶余权重向量为（1, 11, 6, -3, -10, 5, 9, 7, 8, -4, 2, -1, -11, -6, 3, 10, -5, -9，-7, -8, 4, -2）。

——29 的 2 阶余权重向量为（1, 13, -5, -7, -4, 6, -9, -1, -13, 5, 7, 4, -6, 9）

——31 的 3 阶余权重向量为（1, 8, 2, -15, 4）

——37 的 2 阶余权重向量为（1, -11, 10）

九、优化的艺术：把一种复杂的运算简化为一种简洁的运算

前面，我们计算一些素数的 1 阶、2 阶、3 阶余权重向量。获得这些向量的计算过程是可以优化的。

以 11 的 1 阶权重为例。10 对于 11 的余数权重数为 -1，100 对于 11 的余权重数不用 100 除以 11，只需要 -1 的平方即可，也就是 1。1000 对于 11 的余权重数是 -1 的 3 次幂，即 -1。

以 37 的两阶余权重为例。100 对于 37 的余权重数为 -11，100 的平方对于37的余权重数为-11的2次幂（121）对于 37 的余权重数即 10,100 的 3 次方对于 37 的余权重数为 10 与 -11 的乘积对于 37 的余数即 1。

一般地，在求关于整数 S 的余权重（1, a_1, a_2, a_3...）的计算中，可以由 a_m 与 a_1 的乘积对于 S 的余数得到 a_{m+1}。这是一个优化的计算方法。

十、应用的艺术：对理论研究得出的成果应用于具体的情景

数学的研究，也许一开始并不能指导实践，只是纯粹的思维艺术。当然，有些研究是由于应用中的问题来推进的，而有些研究是为了思维的乐趣或者纯理论的推演。古代数学，往往是由于应用中的问题而引发的研究，而现代数学则不然，许多理论研究只到很后面才应用于物理学、经济学、生物学、密码学等等领域。今天，我

们在这里构建的余权重向量理论或许发展一定阶段会有应用场景。在这里，我们玩一些数学趣味题。

例如，37的2阶余权重向量是（1, -11, 10）。这就可以提示我们：一个6位数，两位一分，第一个两位和第三个两位的数字均等于第二个两位，这个数可被37整除。形如ababab结构的数。例如，787878，131313，101010。

证明：因为37的2阶余权重向量为（1, -11, 10），所以六位数ababab对于37的余数，同构于ab*·1+ab*(-11)+ab*10=0，故被37整除。

再例如：一个正整数$\overline{a_n \cdots a_2 a_1 a_0}$，依次以两位为一组，$a_1a_0$，$a_3a_2$，$a_5a_4$ ...，若奇数组的数之和与偶数组的数之和相等，则这个数可被101整除。

证明：因为101的2阶余权重向量为（1, -1），故对于$a_n \cdots a_2a_1a_0$而言，余数同构于（$a_1a_0 + a_5a_4 + a_9a_8 + \ldots$）*1+（$a_3a_2 + a_7a_6 + a_{11}a_{10} + \ldots$）*(-1)，因此只要奇数组的数之和与偶数组的数之和相等，则这个数可被101整除。

十一、哲思的艺术：从一个学科的知识结构中抽象出哲学的思想

我们以关于素数31的3阶余权重向量（1, 8, 2, -15, 4）为例，把一个正整数以1000为组别，分解出数位数组x_i，例如65087667255192098，分解出098, 192, 255, 667, 087, 65共六组，计算由各组构成的数位数行列式与余权重向量的乘积，考察这个积对于31的余数即可。一般而言的计算式子如下：

$$1*\sum_{k=0}^{n} x_{1+5k} + 8\sum_{k=0}^{n} x_{2+5k} + 2\sum_{k=0}^{n} x_{3+5k} + (-15)*\sum_{k=0}^{n} x_{4+5k} + 4*\sum_{k=0}^{n} x_{5+5k}$$

相当于构成了一个结构式：X+8Y+2Z-15F+4E，其中X, Y, Z, F, E为这个整数的各数位组上的数组之和，这些和代入由余权重向量构成的代数式。这个代数式对于31的余数就是这个整数对于31的余数。从中，我们领悟到“结构性约束”的哲学原理。结构性约束指影响系统内部组成要素及其关系的根本性限制条件，它会导致系统在运行中表现出特定行为或性能瓶颈。这个结构的关键约束是余权重向量中的元素，对于一个确定的素数（例如31）而言，它是稳定的，也是独特的。对于一个整数而言，各数位组的数字之间构成一个整体，每个数字的变化又影响到代数式的和对于31的余数，但是，可能几个数组的变化又会相互抵消，不会影响到整体对于31的余数。这其中的哲学思想岂不是物理宇宙和人类社会之中的普遍原理？对于一个社会而言，某些因素的变化，导致社会的巨大变革，而又有许多因素（例如人）的变化对社会的作用相互抵消，不影响整体。对于一个公司，也是如此。

十二、后记

有识之士指出，我们的基础教育让学生耗费了太多的时间在重复地刷题，而缺少激荡创新思维的研究型学习，这严重阻碍了创新型人才的培养。这个研究是我和一位上海的预备年级学生（12岁）一起完成的，关于向量、权重等等定义，给她介绍后，她不但懂得了含义，还体会到为什么要引入这些概念。我并不知道这篇论文对于数学学科发展有什么具体的重大意义，但是，它肯定是有意义的。本文以我的口吻来叙事，其实是我和该同学的合作研究成果。这个研究算是一次纯数学的课题讨论，对于她在学校的数学学习而言，没有直接的关联，但是，间接的影响会很大，最大的意义是她经历一场研究型而不是接受型的数学思维活动，欣赏了丰富的思维艺术。即使是对于一个素数的余权重向量的寻找过程，那一系列仔细的计算过程，对她也是有益的。更为重要的事，她从中隐约感觉到自己的研究对于素数理论的关联。对于一位数学教师或者家长而言，带领有较好数学天赋的学生开展这样的研究，是不是我们的教育应该采用的一种很好的教学方式呢？这样的教学，是不是对于培养创新人才有极大的帮助呢？

参考文献

[1] 华罗庚,《华罗庚文集·数论卷I》, 科学出版社, 2010

[2] 华罗庚,《华罗庚文集·数论卷II》, 科学出版社, 2010

[3] 张奠宙, 马文杰, 简评“数学核心素养”,《教育科学研究》, 2018 (09): 62-66+85

作者简介：

陈前 任职上海市杨浦区教育局 , 为华东师范大学数学教育硕士，数学高级教师，曾担任中学校长，获得上海市教书育人楷模、上海市园丁、上海市推进学习型社会建设先进人等荣誉。喜欢文学、社会学，在数学教育中注重数学思维与数学美学的融合，指导学生开展跨学科项目化学习。

施怿晗 上海市控江中学高一年级学生

Appreciating the Art of Thinking in Mathematical Research with "Remainder Weight Vector" as an Example

Chen Qian[1], Shi Yihan[2]
(1. Education Bureau of Yangpu District; 2. Kongjiang Middle School, Shanghai 200093, China)

Abstract: When the solution to a mathematical problem features distinctive characteristics, it is of great research significance to extract a universal tool from such a solution. This paper reports a research project completed collaboratively by a middle school mathematics teacher and his students, which is just such an endeavor. Starting from the discussion on a problem of divisibility by 11 in Collected Works of Hua Luogeng, the research extracts the concepts of "remainder weight", "remainder weight vector", "digit determinant" and other related notions, and on this basis, develops a new tool for testing divisibility. Moreover, from the introspective perspective of "thinking review", the paper appreciates and elaborates one by one on the art of thinking embodied in mathematical research activities. The research findings are of notable reference value for both mathematical research and mathematics education.

Keywords: Remainder weight vector; Mathematical research; The art of thinking