

「探幽溯源」

# 有关拉格朗日点的笔记

王志强

**摘要：**拉格朗日在研究三体问题时发现，在主副星天体体系中存在五个特殊位置，即拉格朗日点。小天体在这些点上所受的万有引力与离心力达到动态平衡，得以长期停留。五个点中，L4与L5为稳定平衡点，小行星在这里可以长期聚集并在其晕轮轨道上永久运行；L1、L2、L3为半稳定点，卫星在其利萨如轨道上需依靠轨道制导维持在其既定轨道上运行。太阳—地球及地球—月球系统均拥有这些点，并成为现代航天的重要战略位置：SOHO工作在L1上用以监测太阳活动，韦伯望远镜工作在L2点上用于观测宇宙深空，中国探月工程利用地月L2进行月背通讯。未来，L4与L5有望成为太空城市、深空补给站与大型科学设施的建造基地，是人类迈向太空文明的重要起点。

**关键词：**拉格朗日点；拉格朗日点稳定性；双星结构；SOHO；韦伯望远镜；希尔半径；太空利用

**中图分类号：**P16

在宇宙宏大的引力场中，在群星闪烁的夜空里，蕴藏着无尽的奥秘。约瑟夫·路易·拉格朗日，18世纪最伟大的天体力学家，以其深邃的数学洞察力，在深化牛顿力学的基础上，提出了分析力学，为人类解开宇宙的奥秘奠定了坚实的基础。例如，分布于宇宙中的拉格朗日点，就是其对天体力学贡献的一颗璀璨的明珠。

故事发生在1772年。当时，天文学家们正被一个古老的难题困扰着——“三体问题”：当三个天体在引力作用

下，它们的轨道会是什么样？这个似乎听起来很简单的问题却是一个几乎无解的混沌之谜。

在一个复杂问题面前，合理的简化往往是解决问题的关键，独辟蹊径，才会有意外的发现。在三体问题上，拉格朗日提出了这样一个问题：“如果在三体之中，有一个是很小的，其结果会是什么样？”在回答这个问题的过程中，他发现了拉格朗日点。在这些点上，这个很小天体受到的净引力恰好平衡它自身运动的离心力，这些点

好像是小天体的避风港一样，它们可以在这些点附近游荡而不受外界影响。

如今，拉格朗日点已成为人类探索太空的“战略要地”，从观测太阳的SOHO卫星到凝视宇宙深空的韦伯望远镜，都依托于这些“引力港湾”。拉格朗日用他深邃的洞察力与高超的理论，为后世的我们，在星辰间找到了探索宇宙的观察站。

现在，就让我们来到宇宙深处，近距离地了解一下拉格朗日点那些种的迷人之处。

**通讯作者：**王志强 **邮箱：**jzwang2003@yahoo.com

**收稿日期：**2025-11-13 **录用日期：**2025-11-20

**DOI：**<https://doi.org/10.58244/sha.263520>

## 一、从双星说起

夜晚，天空星罗棋布，纷繁杂章。在这看似杂乱的背后，其实有着一个极简的规律，这就是万有引力。在万有引力的支配与约束下，每个天体各有其位，各行其道，因而构成了整个宇宙。

三体是一个不稳定的结构，所以在天体的彼此关系中，绝大多数是以双体形式存在的。也就是说，对于任意一个给定的星体，它所受的万有引力主要来自于双体中与其对应的那个星体，而宇宙中其它所有剩余的星体对它的引力都甚乎其微。这样的星体结构称为双体结构或双星结构。

如果把双星中两个星体的质心用一根直线连接起来的话，这条假想的直线会像一根推杆一样，在空中推动着这两个星体，围绕着它们的共同质心，在一个固定的平面上做周而复始的旋转运动。这个固定的平面一般称为公转平面或黄道面（尤其在太阳系中，黄指太阳）。如果从双星的共同质心望去，双星中的每个星体的运动轨迹都是一个椭圆。共同质心是它们各自椭圆轨道的椭圆焦点之一（一个椭圆有两个焦点）。

在双星结构中，大部分双星都是一大一小的，例如太阳与地球，或者地球与月球。太阳的质量是地球质量的33万3千倍（百万除3），而地球的质量是月球质量的81倍（3的4次方）。我们称这种双星结构为主副星结构。太阳系中每个行星与太阳组成的

双星结构都是主副星结构。在宇宙中，有大约3分之2的双星是主副星结构。

在主副星体系里，虽然主星质量远大于副星质量，但当某个小星体离副星足够近的时候，该小星体的运动有可能主要受副星的影响与支配，而不是由主星来支配。这个副星的“势力范围”称为希尔半径（犹如地方管辖）。例如在太阳与地球所组成的主副星结构中，地球的希尔半径是150万公里，是日心到地心距离的百分之一。月球到地心的距离约为地球希尔半径的4分之1，因此，月球的运动主要受地球的支配，而不是受太阳的支配。

以上是双星的基本情况，以下介绍存在于双星系统中的所谓拉格朗日点。

## 二、主副星系统的拉格朗日点

大约在18世纪左右，欧拉与拉格

朗日等人发现，在任何主副星系统中，都存在着五个“点”，位于这五个点上的小星体，它们的受力，包括自身绕行的离心力，处于平衡状态。这就是天体力学中著名的拉格朗日点。是继Kepler行星三大定律之后在天体力学中的又一重大发现。这五个点，根据它们的位置分别标识为L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, L<sub>3</sub>, L<sub>4</sub>, L<sub>5</sub> (L为拉格朗日姓氏Lagrange的字头)。这五个拉格朗日点座落在双星系统的黄道面上，随双星一起在黄道面上围绕着双星的共同质心而公转。因此，这五个点相对双星的位置是固定的。如下图所示（以太阳地球为例），L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, L<sub>3</sub>位于主副星质心连线上。其中，L<sub>1</sub>与L<sub>2</sub>位

于副星（地球）的两侧，距离副星质心的距离恰好是副星的希尔半径；L<sub>3</sub>位于副星的轨道上，与副星对称，位于主星的另一侧。L<sub>4</sub>与L<sub>5</sub>亦分别位

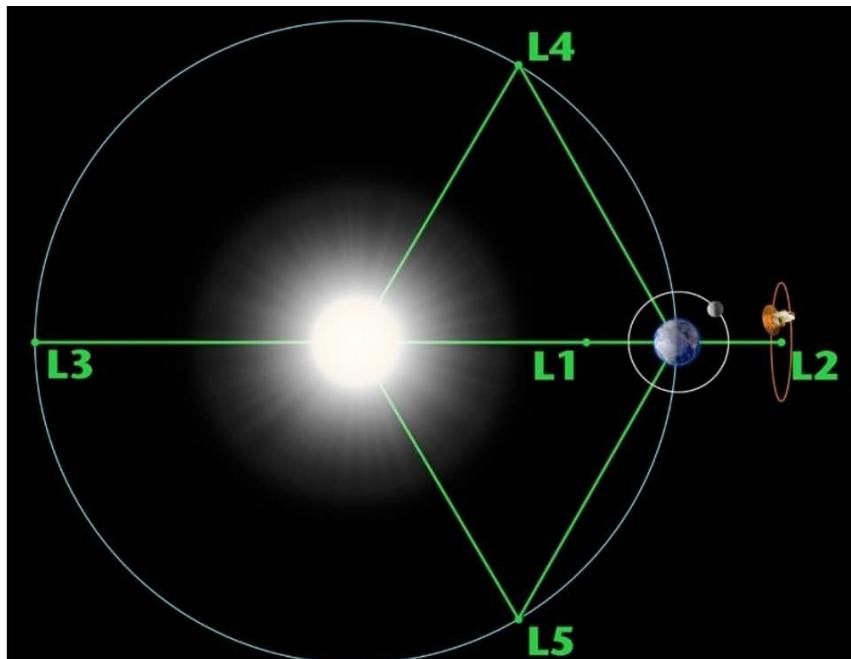


图1. 主副星系统的拉格朗日点（图来自NASA网站：NASA/WMAP Science Team）

于副星的轨道上，它们分别座落在主副星质心连线两侧的 60 度角处，而分别与主副星一起构成一个等边三角形。

在白天的任何时候，如果你朝向太阳望去，那么在你前方 150 万公里处将是 L1，而在太阳的后面，距离你 3 亿公里处，将是 L3。双臂平伸于身体两侧，再分别向前转 30 度，在你右手与左手指向的 1 亿 5 千万公里处将分别是 L4 与 L5。如果你转过身来背对太阳，那么在你前方 150 万公里处即是 L2，此时，韦伯卫星正在那里围绕 L2 运行。

### 三、拉格朗日点的稳定性

如上所述，当某个小星体位于任一拉格朗日点的时候，主副星对其的两个万有引力与其运动时的离心力相平衡（三力平衡）。因此五个拉格朗日点均为平衡点。注意，这里的平衡是“动态平衡”，既小行星在围绕拉格朗日点绕行的轨道上的平衡，而非停留在拉格朗日点上的平衡。

在这五个平衡点之间，只有 L4 与 L5 是稳定点。也就是说当某个小行星由于某种原因接近它们之后，小行星会永久性地绕其旋转而无法离开。这样的稳定平衡点在动力学中也称为吸引子 (Attractor)。因而 L4, L5 犹如小行星的“收容所”一样，在它们附近聚集有越来越多的小行星。在天文望远镜的成像上，这些小行星的轨道像一个朦胧的圆环带一样，因而其轨道称为晕轮轨道 (Halo Orbit)。

与此相对应，L1, L2 与 L3 是半稳定的。其不稳定方向在主副星的连线方向上。当小行星围绕其中任意一个拉格朗日点运行时，每当到达这条连线附近后，都会被主星拉远一些而渐渐偏离其原来的轨道。这样，其运动虽然是往复环绕的，但其周期与轨道却不是定常的，而是每旋转一周，接下来的一周周期与轨道都会变大一些。这样的周期称为类周期 (Quasi-periodic)，而这样的类周期轨道称为利萨如轨道 (Lissajou Orbit)。一般来讲，这些轨道平面并不一定在黄道面上，而是和黄道面有一个二面偏角。

### 四、拉格朗日点的应用与前景

如今，随着科技的发展，拉格朗日点已经不再是一个纯粹的数学解和空间坐标，而是承载着人类好奇心与雄心的疆域，成为了人类观测与了解宇宙的天文台。

因为 L1 位于太阳与地球之间，且与地球同步绕太阳运行，因而发射到 L1 的卫星可直接地无间断地观测太阳的活动。最著名的便是 SOHO 卫星 (Solar and Heliospheric Observatory)。它如同一名永不疲倦的哨兵，自 1995 年发射以来，以人类从未所知的细节揭示了太阳表面的各种活动——太阳的磁爆与太阳风，日冕物质抛射、太阳耀斑的爆发，与黑子的活动等，为人类预报“空间气像”、为保护卫星通讯网络，在轨航天器，和地面电网提供

了至关重要的数据。它不仅深化了我们对太阳的认识，而且迄今为止还意外地发现和跟踪了 4500 多颗彗星的活动，使人类能够更好地认识与监测彗星的活动。

而在地球另一侧的 L2 点，同样地与地球同步绕太阳旋转。由于地球的隔阻，可以避免受到太阳光的干扰与昼夜极大温差的麻烦，是进行宇宙深空观测的绝佳地点。

在这里，韦伯望远镜让人类第一次真正有机会追溯到宇宙的最初状态，研究第一批恒星和星系的形成，探索行星的起源，甚至在某系外行星的大气中发现了二氧化碳，寻找到了宇宙中可能有其它生命存在的证据。它帮助科学家回答那些自古以来的终极问题——我们从何而来？宇宙如何诞生？还有没有其他生命，同人类一样，也在仰望同一片星空？

如今，这双金色的眼睛仍在太空的寒冷黑暗中工作。它没有声音，却在用光讲述最古老的故事。人类或许还无法到达那些遥远的星系，但韦伯已经替我们跨越了时间的深渊，让我们看见了宇宙的过去，也照亮了未来的方向。

当然，在地球与月亮这对双星结构里，也有五个拉格朗日点。由于月球的背面总是背负地球，在月球背面的探测器不能直接将信号发到地面，在中国探月工程中，会把一个中继站发射到地月的 L2 上，然后通过勘探车上的信号发射器将信号发射到中继站上，然后由中继站将信号折返到地面

附近的某通信卫星上。

如上所说, L1 与 L2 都是半稳定点, 发射到这两点的卫星都会“渐渐”远离它们而丢失。这就需要对卫星轨道进行制导, 而使卫星保持在其轨道上。

像控制飞机与汽车的行驶一样, 控制卫星轨道同样需要消耗能量(燃料或太阳能)。设计什么样的轨道才能用最小的能量消耗来达到有效控制是轨道设计的关键。在地面上, 设计道路时应尽量避免大幅度的上下坡。在空间中, 与路面上下坡相对应的是所谓的“能量梯度”。从低能点向高能点

运行, 如同上坡, 需要消耗能量。从高能点向低能点下滑也需要适当控制以免失稳。因此轨道设计的关键是在规定范围内寻找平缓的能量轨道。除主星外, 失稳力还来自其它天体的随机扰动, 所以带多少燃料是不能准确计算的, 需要通过估算来决定。为适当保守起见, 估算都会留有余富, 所以很多时候, 卫星运行的实际寿命都会高于设计寿命。

L4 和 L5 点承载着人类更遥远的太空梦想。科学家们设想, 这里将是未来大型空间建筑的理想之地。由于

其固有的稳定性, 在此建造规模空前的空间站、太空城市或巨型望远镜, 所需的轨道维持燃料将远低于 L1 与 L2 上的卫星。它们可以成为深空航行的中继站和补给港, 为前往火星乃至更远星球的飞船提供支持。更进一步, L4 与 L5 或许是人类成为“跨天体物种”的关键。我们可以利用可能聚集在此的太空资源(如水或冰), 建立太空工厂和太阳能发电站, 构建初步的太空基础设施。从某种意义上说, L4 和 L5 不仅是科学的观测站, 更是未来太空经济与文明的潜在摇篮。

#### 作者简介:

**王志强** 工程力学博士, 博士后。现任某公司燃气轮机总工程师。曾在世界三大燃气轮机与航空发动机公司任职。曾任国际青少年科技大赛首席评委, 州青少年科技大赛评委。热爱阅读, 闲暇喜欢科普写作, 诗歌创作, 热爱数学与科学。

#### Notes on Lagrange Points

Wang Zhiqiang

**Abstract:** Lagrange, while studying the three-body problem, discovered five special positions in any primary–secondary celestial system, known as the Lagrange points. At these points, the gravitational forces from the two major bodies and the centrifugal force of a small object reach a dynamic balance, allowing it to remain in a relatively stable orbit. Among these, L4 and L5 are stable attractors capable of accumulating asteroids, while L1, L2, and L3 are semi-stable and require station-keeping for spacecraft. Both the Sun–Earth and Earth–Moon systems contain these points, which have become strategically important in modern space exploration. The SOHO spacecraft at L1 continuously observes solar activity, while the James Webb Space Telescope at L2 studies the early universe and exoplanet atmospheres. China’s lunar exploration program uses the Earth–Moon L2 point as a relay for far-side lunar missions. Looking forward into the future, L4 and L5 may become ideal sites for large-scale space infrastructures, deep-space supply depots, and even space habitats. These gravitational harbors may eventually serve as launchpads for humanity’s expansion into the cosmos.

**Keywords:** Lagrange points; Stability of Lagrange Points ; Twin Star System; SOHO; JWST; Hills Radius; Space utilization